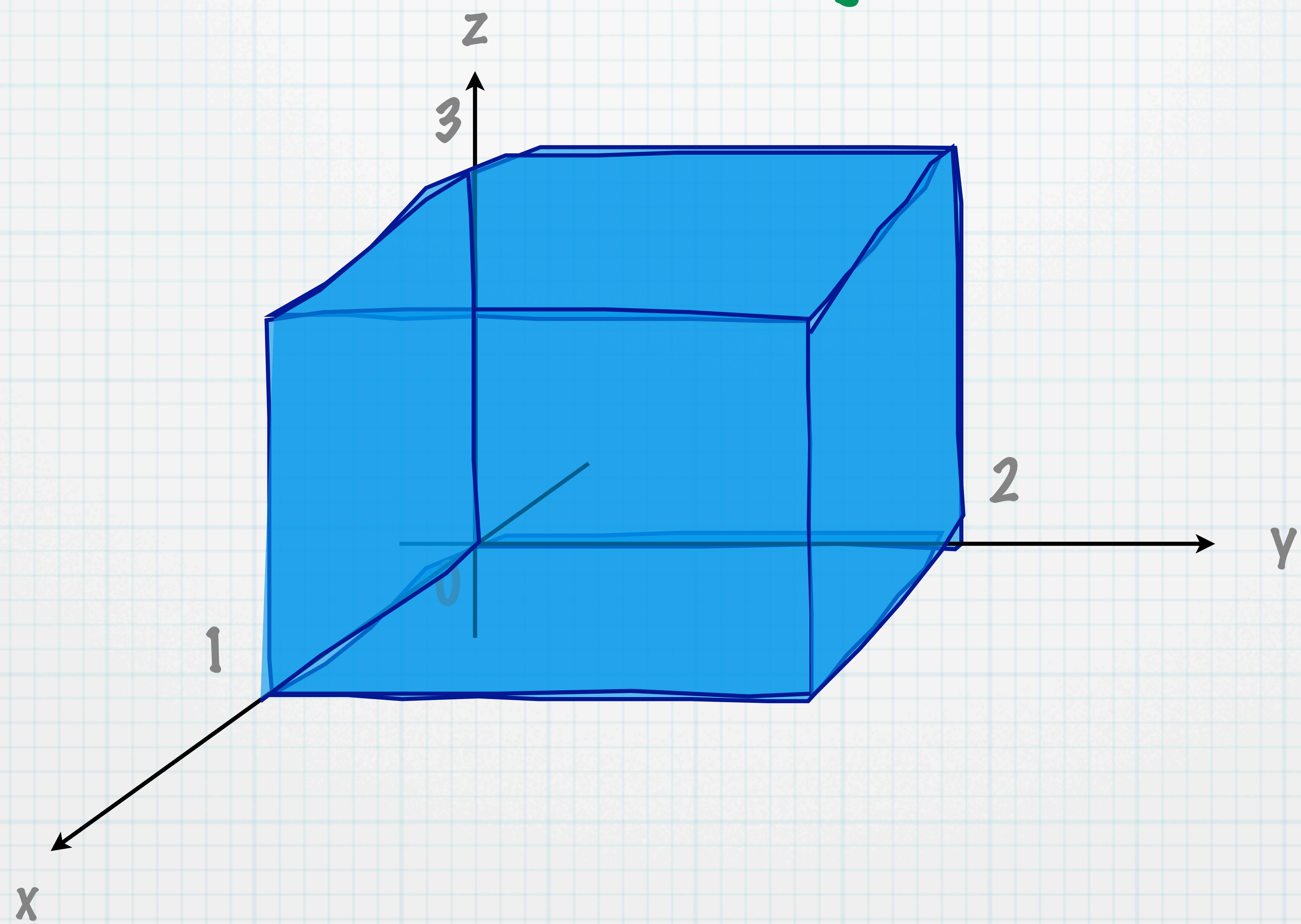
Practica 14

Integrales Triples

Problema 1.

Escriba las seis (diferentes) integrales triples asociadas al volumen de un solido rectangular que se encuentra en el primer octante, delimitado por por los planos de coordenadas y los planos $x=1$, $y=2$ y $z=3$. Evalúe una de las integrales

Región



$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 3 \, dy\, dx = \int_0^1 6 \, dx = 6,$$

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 dz\, dx\, dy, \; \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 dx\, dy\, dz,$$

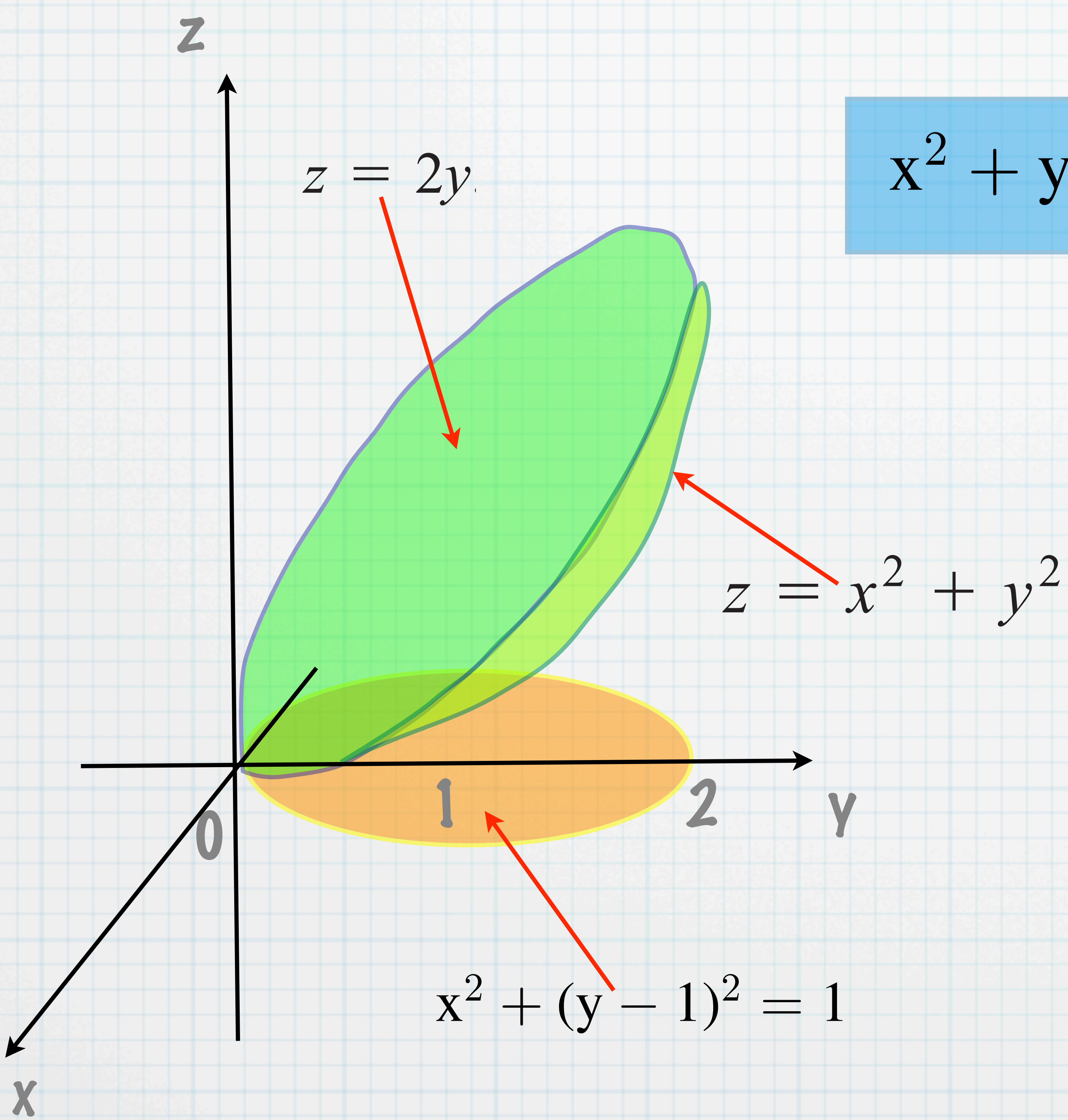
$$\int_0^2 \int_0^3 \int_0^1 dx\, dz\, dy,$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^2 dy\, dx\, dz, \; \int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 dy\, dz\, dx$$

Problema 2.

Sea D la región delimitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$. Escriba la integral triple con diferenciales dz dx dy y dz dy dx, que den el volumen de D. No integre ninguna de las expresiones.

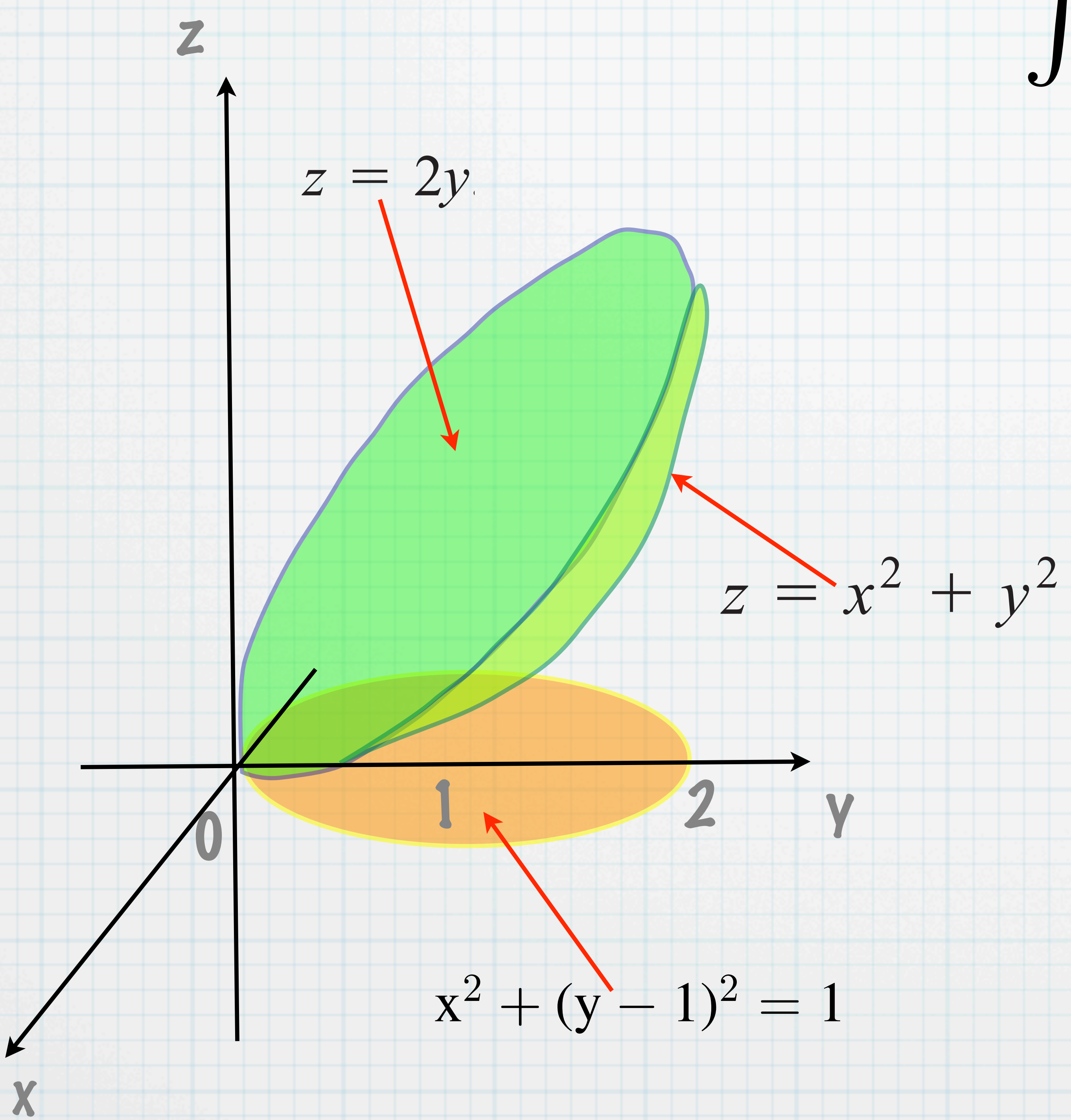
La región R en el plano:



$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1,$$

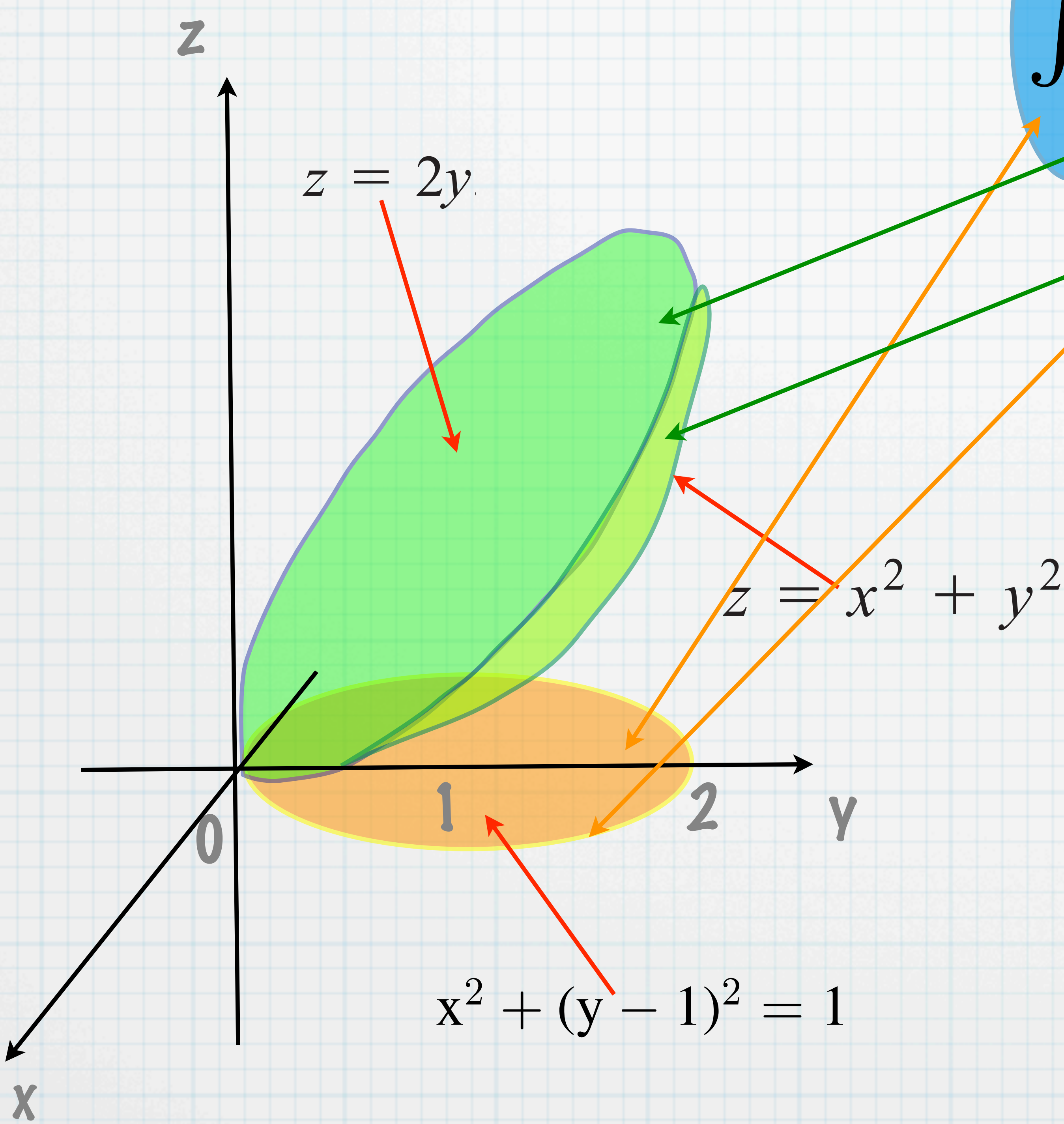
Primera integral:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{2y} dz\, dx\, dy$$



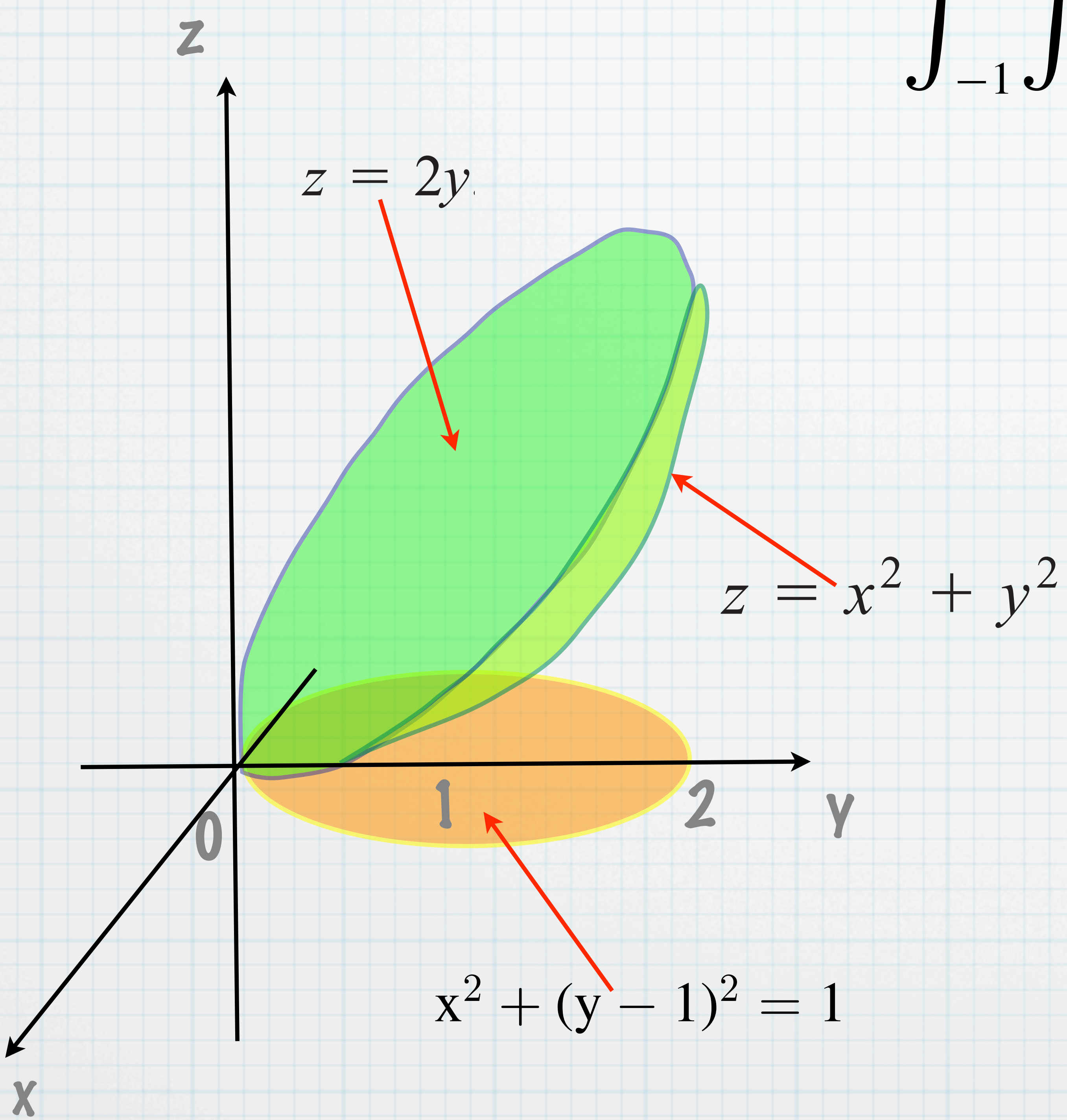
Primera integral:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y - y^2}}^{\sqrt{2y - y^2}} \int_{x^2+y^2}^{2y} dz\, dx\, dy$$



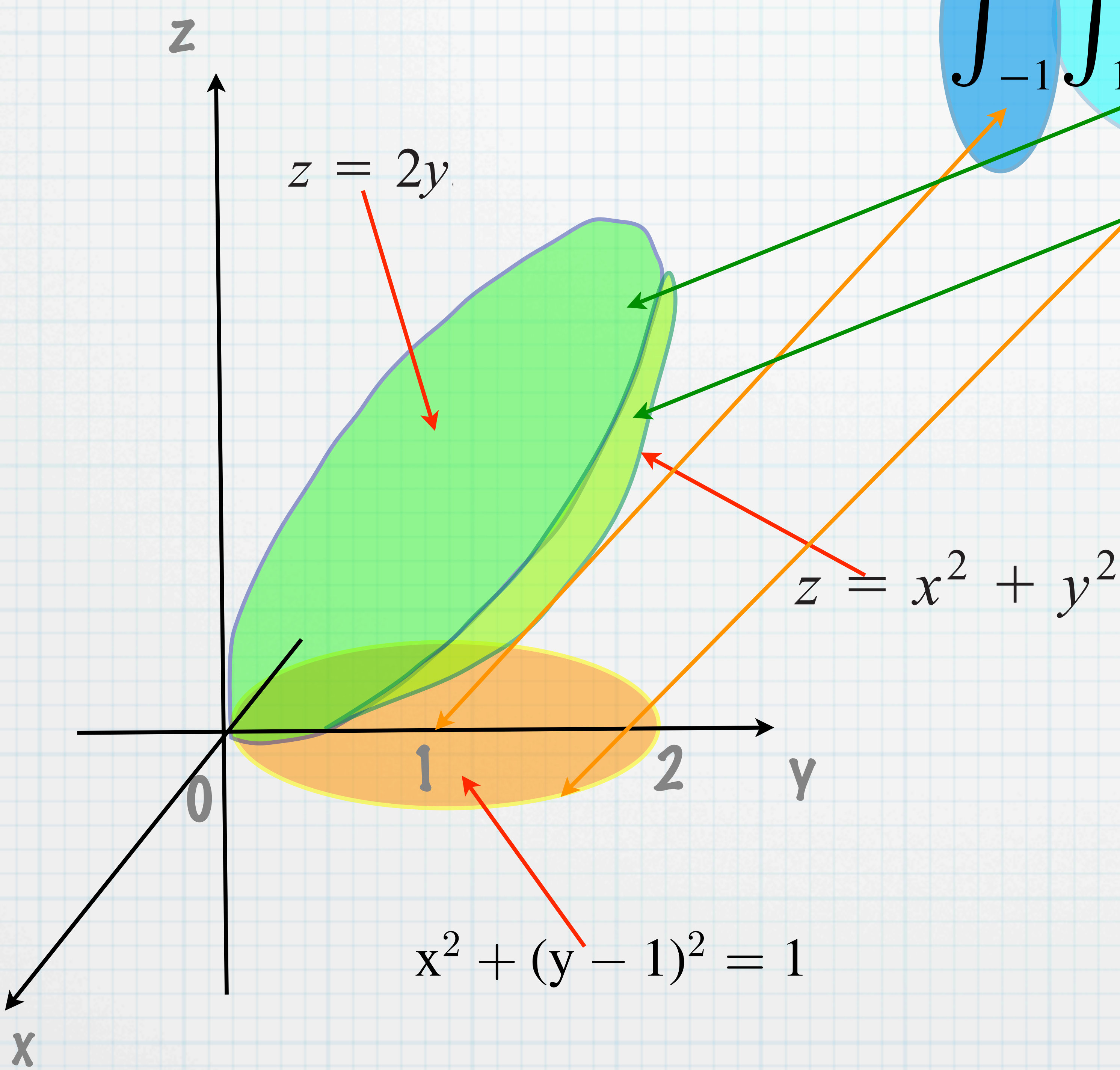
Segunda integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2y} dz\,dy\,dx$$



Segunda integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2y} dz\,dy\,dx$$



Problema 3.

a) $$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$$

b) $$\int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{1}{xyz}\,dx\,dy\,dz$$

15.4-7,9,12,14,17

c) $$\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (x+y+z)\,dy\,dx\,dz$$

e) $$\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi \cos(u+v+w)\,du\,dv\,dw$$

d) $$\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$$

Ejercicio 1

a) $$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)\, \mathrm{dz\,dy\,dx} = \int_0^1\int_0^1 \left(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \tfrac{1}{3}\right) \mathrm{dy\,dx}$$

$$= \int_0^1 \left(\mathrm{x}^2 + \tfrac{2}{3}\right) \mathrm{dx} = 1$$

b) $$\int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{1}{xyz}\, dx\, dy\, dz$$

$$\int_1^{\mathrm{e}}\int_1^{\mathrm{e}}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{\mathrm{xyz}}\, \mathrm{dx\,dy\,dz} = \int_1^{\mathrm{e}}\int_1^{\mathrm{e}} \left[\frac{\ln \mathrm{x}}{\mathrm{yz}}\right]_1^{\mathrm{e}} \mathrm{dy\,dz} =$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{\mathrm{yz}}\, \mathrm{dy\,dz} = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\frac{\ln \mathrm{y}}{\mathrm{z}}\right]_1^{\mathrm{e}} \mathrm{dz} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{\mathrm{z}}\, \mathrm{dz} = 1$$

c) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x + y + z)\, dy\, dx\, dz$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z})\, \mathrm{dy}\, \mathrm{dx}\, \mathrm{dz} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{xy} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{y}^2 + \mathrm{zy}\right]_{-1}^{1} \mathrm{dx}\, \mathrm{dz}$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2\mathrm{x} + 2\mathrm{z})\, \mathrm{dx}\, \mathrm{dz} = \int_{-1}^{1}\left[\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{zx}\right]_{-1}^{1} \mathrm{dz}$$

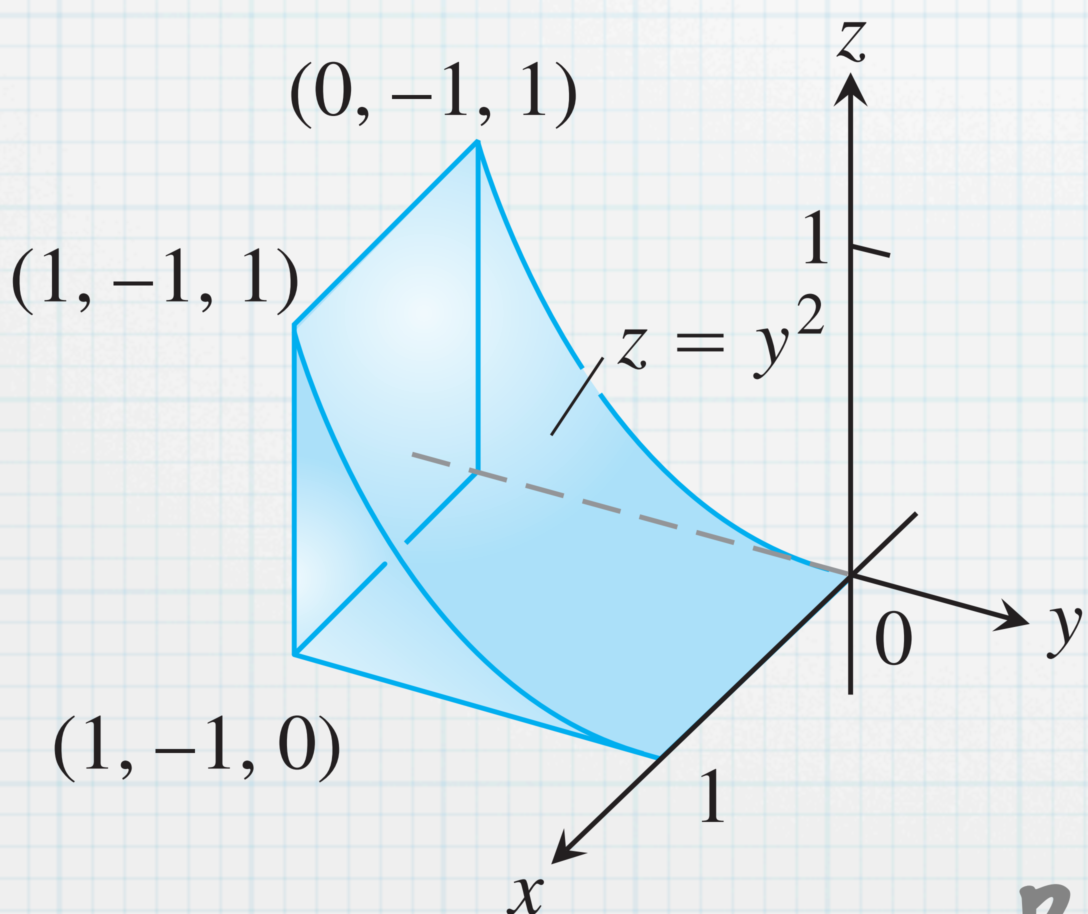
$$= \int_{-1}^{1} 4\mathrm{z}\, \mathrm{dz} = 0$$

Problema 4.

Sea la integral

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz\, dy\, dx.$$

con región de integración



Reescriba la integral en sus 5 formas posibles.

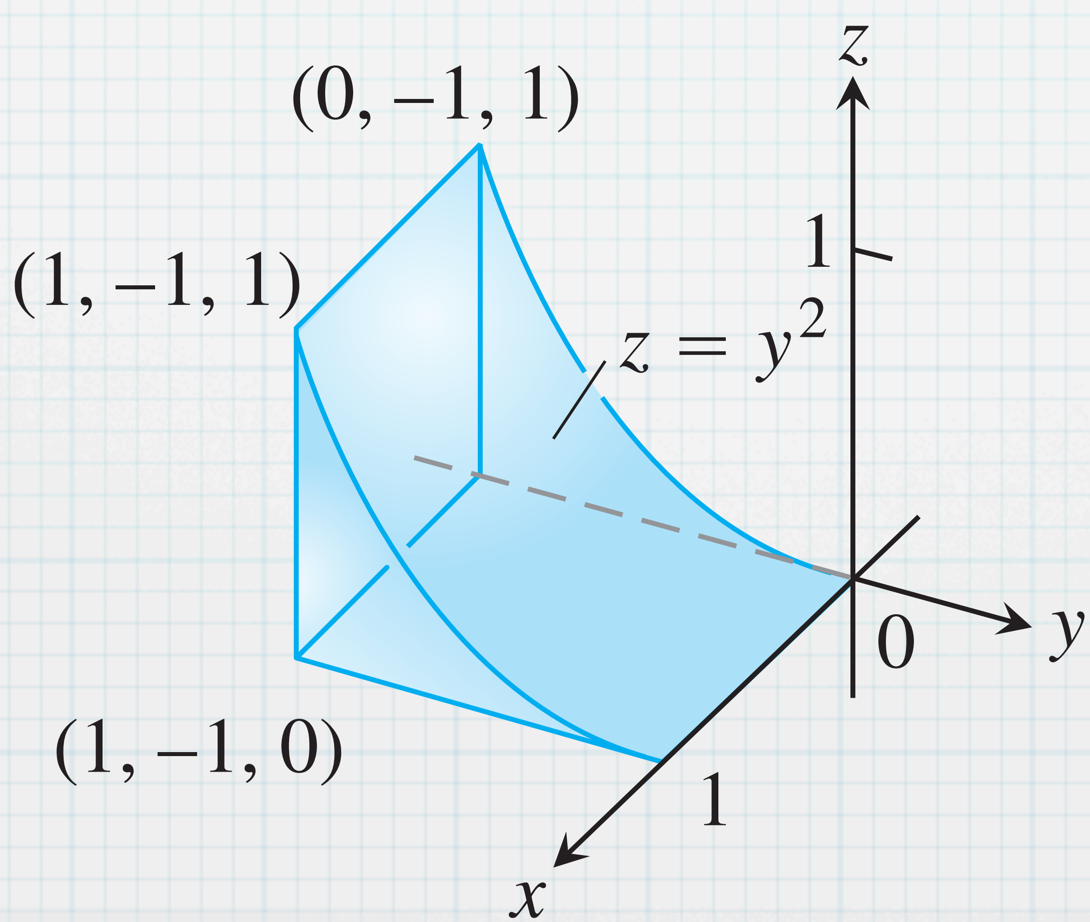
(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{z}} dy\,dz\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{z}} dy\,dx\,dz$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{y^2} \int_0^1 dx\,dz\,dy$

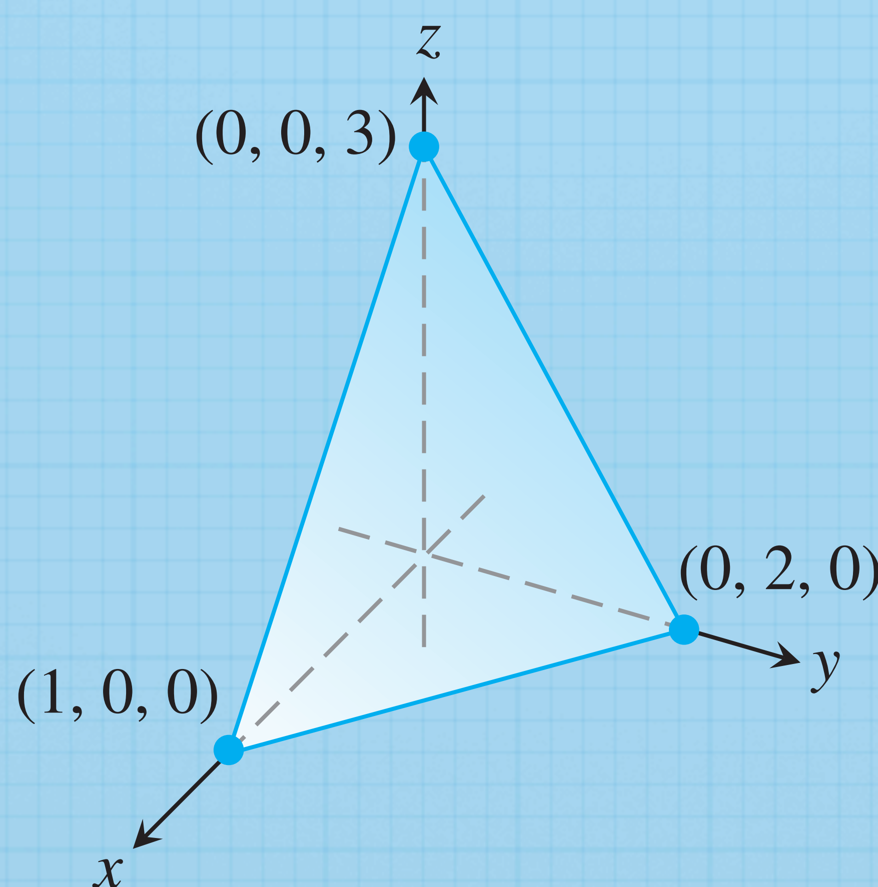
(e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^{y^2} dz\,dx\,dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{z}} \int_0^1 dx\,dy\,dz$



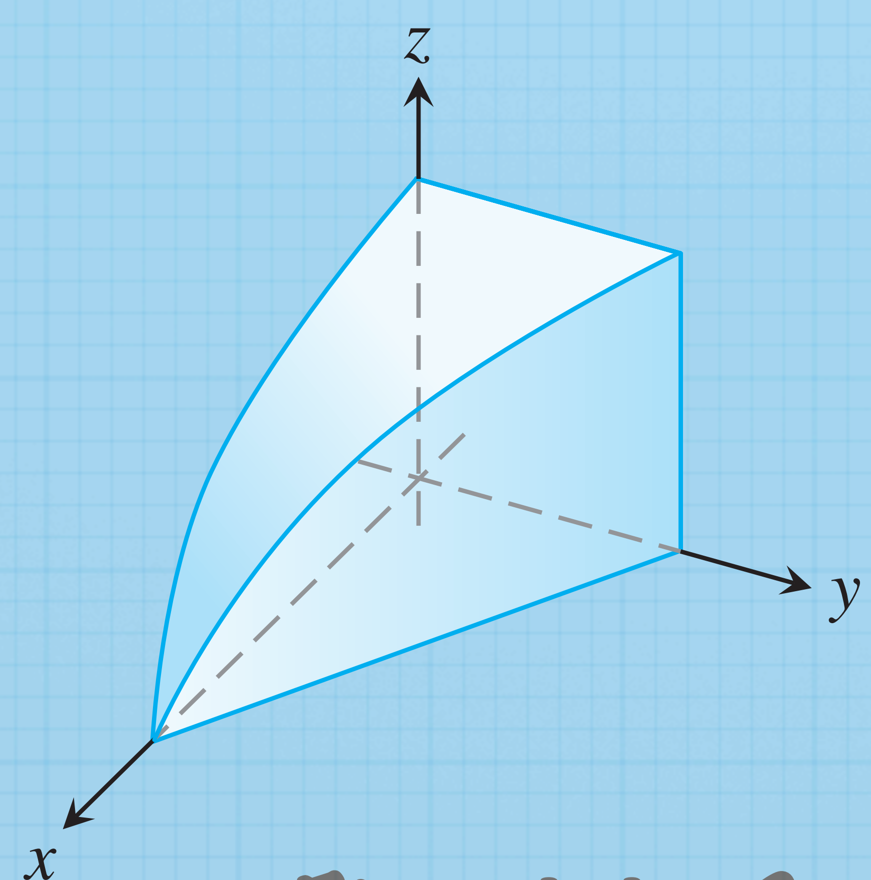
Ejercicio 2.

Calcule el volumen del tetrahedro construido en el primer octante por los planos de coordenadas y el plano que pasa por los puntos (1,0,0), (0,2,0) y (0,0,3).



Calcule el volumen de la región construida en el primer octante delimitado por los planos de coordenadas, el plano $y = 1 - x$, y la superficie

$$z = \cos(\pi x/2), \;\; 0 \leq x \leq 1$$

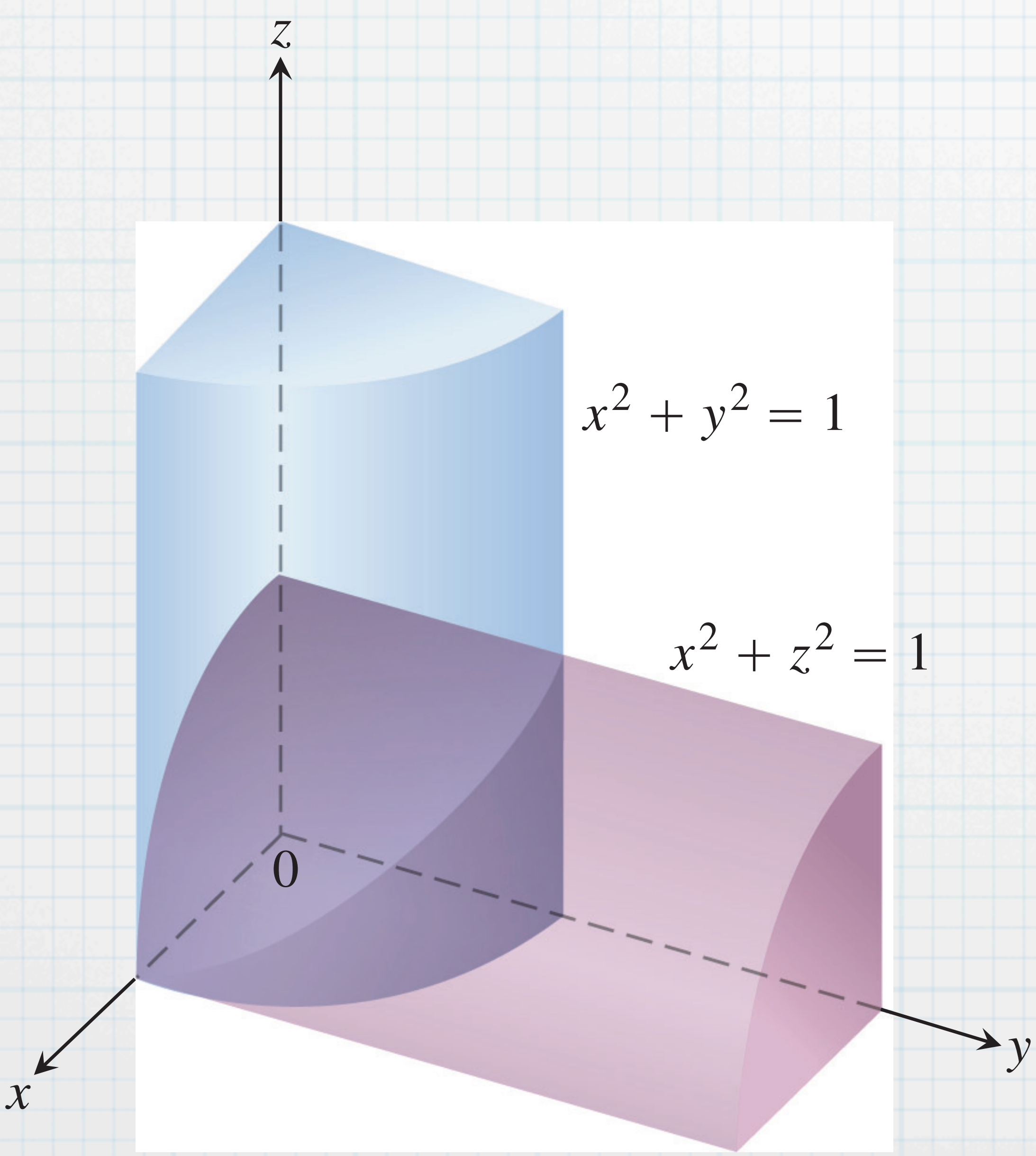


Ejercicio 3.

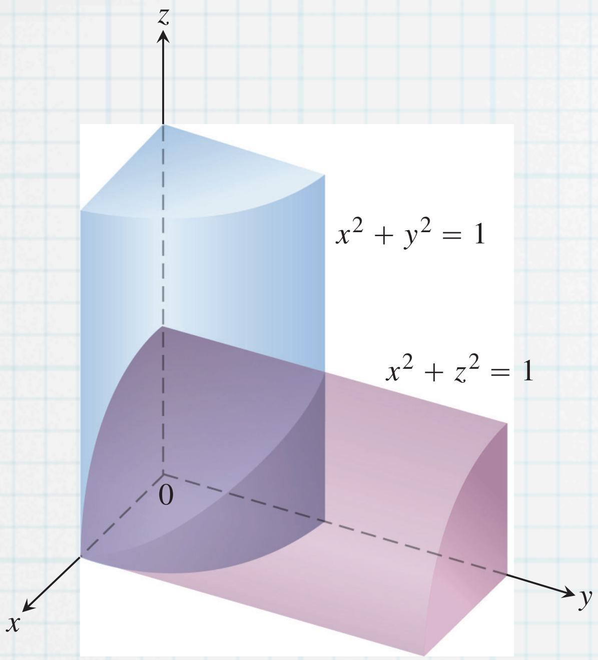
Problema 5.

Calcule el volumen de la región comun al interior de los cilindros

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{y} \quad x^2 + z^2 = 1$$



En la figura se muestra un octavo de la figura real.



$$V = 8\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\,dy\,dx$$

$$= 8\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx$$

$$= 8\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{16}{3}$$

Problema 6.

Halle el promedio de la función

$$F(x, y, z) = x + y - z$$

sobre la región rectangular en el primer octante delimitada por los planos de coordenadas y los planos

$$x = 1, y = 1,$$

y

$$z = 2$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\int_0^2 (x + y - z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 (2x + 2y - 2)\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (2x - 1)\, dx = 0$$

Evalúe las siguientes integrales, por medio de un cambio de orden de integración

a) $$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\, dx\, dy\, dz$$

b) $$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2}\, dx\, dy\, dz$$

Ejercicio 4.